

耦合 Burgers 方程的高精度格式*

付钰, 高天, 胡玉蝶, 翁智峰[†]

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 本文采用有限差分-重心插值配点法求解非线性耦合 Burgers 方程. 对于耦合 Burgers 方程, 首先通过直接线性化迭代方法将其转化为线性迭代方程. 然后使用重心插值配点法离散空间, 采用 Crank-Nicolson 差分格式离散时间, 得到对应的线性代数方程组, 并进一步推导得到空间半离散格式和全离散格式的相容性分析. 最后利用数值算例验证了格式的高精度与有效性.

关键词: 耦合 Burgers 方程; 重心插值配点法; Crank-Nicolson; 相容性分析

DOI: 10.13568/j.cnki.651094.651316.2025.10.11.0001

中图分类号: O241.82 **文献标识码:** A **文章编号:** 2096-7675(2026)01-0027-011

引文格式: 付钰, 高天, 胡玉蝶, 翁智峰. 耦合 Burgers 方程的高精度格式[J]. 新疆大学学报(自然科学版中英文), 2026, 43(1):27-37.

英文引文格式: Fu Yu, Gao Tian, Hu Yudie, Weng Zhifeng. The high-precision scheme for the coupled Burgers equation[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition in Chinese and English), 2026, 43(1):27-37.

The High-Precision Scheme for the Coupled Burgers Equation

Fu Yu, Gao Tian, Hu Yudie, Weng Zhifeng

(School of Mathematics Science, Huaqiao University, Quanzhou Fujian 362021, China)

Abstract: This paper proposes the finite difference-barycentric interpolation collocation scheme for the nonlinearly coupled Burgers equation. For the coupled Burgers equation, it is firstly transformed into a linear equations via the direct linearization iteration. The spatial direction is discretized by the barycentric interpolation collocation method, and the time direction is discretized by the Crank-Nicolson scheme. The corresponding linear algebraic equations are derived. The consistency analysis is provided for the semi-discrete scheme in space and the fully discrete scheme. Numerical experiments verify the high precision and efficiency of our scheme.

Key words: coupled Burgers equation; barycentric interpolation collocation method; Crank-Nicolson; consistency analysis

0 引言

耦合 Burgers 方程是一类重要的非线性偏微分方程, 在科学技术领域应用广泛, 如湍流运动、超声速流、波传播、翼型绕流等. 本文考虑如下具有两个未知变量 u 和 v 的耦合黏性 Burgers 方程:

$$\begin{cases} \varepsilon u_{xx} = u_t + \alpha_1 uu_x + \alpha_2 (uv)_x, & a \leq x \leq b, t > 0, \\ \varepsilon v_{xx} = v_t + \beta_1 vv_x + \beta_2 (uv)_x, & a \leq x \leq b, t > 0, \\ u(x, 0) = f_0(x), v(x, 0) = g_0(x), & a \leq x \leq b, \\ u(a, t) = f_1(t), u(b, t) = f_2(t), & t > 0, \\ v(a, t) = g_1(t), v(b, t) = g_2(t), & t > 0, \end{cases} \quad (1)$$

式中: ε 为黏性系数; α_k 和 β_k ($k = 1, 2$) 为依赖物理量的实数; $f_0(x)$ 、 $g_0(x)$ 、 $f_1(t)$ 、 $f_2(t)$ 、 $g_1(t)$ 、 $g_2(t)$ 为给定函数.

* 收稿日期: 2025-10-11; 修回日期: 2025-12-29; 录用日期: 2025-12-30.

基金项目: 国家自然科学基金青年项目“不可压缩流最优控制问题的高效数值算法研究”(11701197).

作者简介: 付钰(2004—), 女, 本科生, 从事偏微分方程数值计算的研究, E-mail: 2285012727@qq.com.

[†] 通信作者: 翁智峰(1985—), 男, 博士, 副教授, 主要从事偏微分方程数值计算的研究, E-mail: zfwmath@163.com.

耦合 Burgers 方程作为一类重要的流体流动方程,对其进行数值求解具有重要意义.许多研究者设计了有效的数值算法求解耦合 Burgers 方程. Sheng 等^[1]提出使用有限元方法结合分级网格上的 L1 公式求解耦合 Burgers 方程; Alharbi 等^[2]利用线耦合方法中的非中心公式与 Runge-Kutta 空间离散化相结合求解耦合 Burgers 方程; Ghafoor 等^[3]针对耦合 Burgers 方程设计了高效三次 B 样条配点数值格式并给出格式的理论分析; Ahmad 等^[4]提出两种基于辅助参数改进的变分迭代算法(MVIA-I与MVIA-II),用于求解耦合 Burgers 方程.一些学者通过 Hopf-Cole 变换来数值求解 Burgers 方程.虽然 Hopf-Cole 变换是一种有效求解 Burgers 方程的方法,但其主要适用于具有特定形式的 Burgers 方程.对于某些特定条件或特殊形式的 Burgers 方程, Hopf-Cole 变换可能无法直接应用或效果不佳.这限制了 Hopf-Cole 变换在更广范围的应用.

近年来,许多学者将重心插值配点法推广到求解各类微分方程,如 Allen-Cahn 方程^[5]、Sine-Gordon 方程^[6]、Volterra-Fredholm 积分方程^[7]、Cahn-Hilliard 方程^[8]等.重心插值配点法是一种新型无网格数值计算方法,具有精度高、程序实施便捷、计算格式简洁、节点适应性优良等优点. Higham^[9]利用重心 Lagrange 插值公式克服 Lagrange 插值公式的缺点,有效避免差分格式带来的累积误差,并使用 Chebyshev 节点有效克服龙格现象,解决了振荡问题. Li^[10]针对线性分数阶反应扩散方程,使用重心插值配点法,并给出方程求解的收敛速度; Li 等^[11]利用重心插值配点法求解双谐波方程,数值算例结果表明该方法的高精度性; Liu 等^[12]提出一种针对耦合 Burgers 方程求解问题的重心插值方法,但未给出该方法的相容性分析; Yi 等^[13]针对时间分数阶电报方程,采用重心插值配点法求解,并给出相应的相容性分析; Li 等^[14]针对一维热传导方程求解问题,并给出重心插值配点格式及其相容性分析.

基于前人工作,本文利用有限差分-重心插值 Chebyshev 配点法求解耦合 Burgers 方程,并给出空间半离散配点格式和全离散格式的相容性误差分析,最后通过数值算例验证格式的有效性.与经典差分方法相比,本文所提算法具有指数收敛的性质,且改变时间或黏性系数,数值解保持稳定.

1 重心插值配点法概述

1.1 重心 Lagrange 插值

考虑一组插值节点 x_j 以及与之对应的实数集合 $f_j (j = 0, 1, 2, \dots, m)$, 借助多项式插值方法可知,在次数不超过 m 的多项式函数空间内,存在唯一的插值多项式 $p(x)$,使得对所有的下标 j ,均满足插值条件 $p(x_j) = f_j$. 将其展开为 Lagrange 插值的形式,可表示为:

$$p(x) = \sum_{j=0}^m \gamma_j(x) f_j, \quad (2)$$

其中基函数 $\gamma_j(x)$ 的定义为:

$$\gamma_j(x) = \prod_{i=0, i \neq j}^m (x - x_i) \left(\prod_{i=0, i \neq j}^m (x - x_i) \right)^{-1}, \quad j = 0, 1, \dots, m. \quad (3)$$

满足性质:

$$\gamma_j(x_i) = \delta_{ji} = \begin{cases} 1, & j = i, \\ 0, & j \neq i, \end{cases} \quad i, j = 0, 1, \dots, m, \quad (4)$$

以及

$$\sum_{j=0}^m \gamma_j(x) = 1. \quad (5)$$

令 $l(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_m)$, 定义重心权:

$$\omega_j = \left(\prod_{i=0, i \neq j}^m (x_j - x_i) \right)^{-1}, \quad j = 0, 1, \dots, m. \quad (6)$$

则插值基函数可表示为:

$$\gamma_j(x) = l(x) \frac{\omega_j}{x - x_j}, \quad j = 0, 1, \dots, m. \quad (7)$$

将式(7)代入式(2),得:

$$p(x) = l(x) \sum_{j=0}^m \frac{\omega_j}{x - x_j} f_j. \quad (8)$$

由式(5)至式(8)可得重心 Lagrange 插值公式:

$$p(x) = \frac{\sum_{j=0}^m \frac{\omega_j}{x - x_j} f_j}{\sum_{j=0}^m \frac{\omega_j}{x - x_j}}. \quad (9)$$

重心 Lagrange 插值在等距节点情形下呈现病态性,若选取满足密度比为 $(1 - x^2)^{-1/2}$ 的节点族,能够使其具备优良的数值稳定性. 而满足该条件的节点分布中,最为简洁的是 Chebyshev 点族,故本文采用第二类 Chebyshev 点族,其节点形式为 $x_j = \cos(j\pi/m)$, $j = 0, 1, \dots, m$, 以此保障重心 Lagrange 插值的数值稳定性.

与传统 Lagrange 插值相比,重心 Lagrange 插值的重心形式为其提供了实质性的算法改进. 不仅将单点求值复杂度降至 $O(n)$, 显著提升计算效率,而且将插值表示为比值的形式,有效规避直接计算高阶基函数时产生的大数相减问题,增强数值稳定性.

1.2 微分矩阵

借助式(9),可以推导得到函数 $p(x)$ 在插值节点 x_i 处的 k 阶导数:

$$p^{(k)}(x_i) = \frac{d^k p(x_i)}{dx^k} = \sum_{j=0}^m \gamma_j^{(k)}(x_i) f_j = \sum_{j=0}^m \mathbf{C}_{ij}^{(k)} f_j, \quad (10)$$

式中: $\mathbf{C}^{(k)} = (\mathbf{C}_{ij}^{(k)})$ 为函数的 k 阶微分矩阵. 对基函数 $\gamma_j(x)$ 求导,结合数学归纳法可推导出 $\mathbf{C}^{(k)}$ 的递推关系式^[15]:

$$\begin{cases} \mathbf{C}_{ij}^{(k)} = k \left(\mathbf{C}_{ii}^{(k-1)} \mathbf{C}_{ij}^{(1)} - \frac{\mathbf{C}_{ij}^{(k-1)}}{x_i - x_j} \right), i \neq j, \\ \mathbf{C}_{ii}^{(k)} = - \sum_{j=0, j \neq i}^m \mathbf{C}_{ij}^{(k)}. \end{cases} \quad (11)$$

2 直接线性化迭代

2.1 直接线性化迭代方法

针对非线性常微分方程 $\mathcal{D}u(x) = f(x)$, 其中 \mathcal{D} 表示微分算子,可将其拆分为线性项和非线性项两部分:

$$\mathcal{L}u(x) + \mathcal{N}u(x) = f(x), \quad (12)$$

式中: \mathcal{L} 为线性微分算子; \mathcal{N} 为非线性微分算子.

若给定初始已知函数 $u_0(x)$, 将其代入式(12)中的非线性项,得:

$$\mathcal{L}u(x) + \mathcal{N}u_0(x) = f(x). \quad (13)$$

此时式(12)转化为线性微分方程. 对式(13)进行求解可得新的函数 $u_1(x)$, 进而构造如下线性迭代格式:

$$\mathcal{L}u_n(x) + \mathcal{N}u_{n-1}(x) = f(x). \quad (14)$$

若该迭代格式满足收敛性,则当 $n \rightarrow \infty$ 时,有 $u_n(x) \rightarrow u(x)$.

在实际计算过程中,当达到给定控制精度 ε 时迭代过程终止,从而得到非线性问题的近似解. 上述过程称为直接线性化迭代方法.

2.2 直接线性化迭代求解耦合 Burgers 方程

非线性耦合 Burgers 方程组可写为如下形式:

$$\begin{cases} \varepsilon u_{xx} = u_t + (\alpha_1 u + \alpha_2 v) u_x + \alpha_2 u v_x, \\ \varepsilon v_{xx} = v_t + (\beta_1 v + \beta_2 u) v_x + \beta_2 v u_x. \end{cases} \quad (15)$$

对于给定的初始假设函数 u_0, v_0 , 式(15)可直接线性化为:

$$\begin{cases} \varepsilon u_{xx} = u_t + (\alpha_1 u_0 + \alpha_2 v_0) u_x + \alpha_2 u_0 v_x, \\ \varepsilon v_{xx} = v_t + (\beta_1 v_0 + \beta_2 u_0) v_x + \beta_2 v_0 u_x. \end{cases} \quad (16)$$

构造线性迭代格式如下:

$$\begin{cases} \varepsilon u_{n+1,xx} = u_{n+1,t} + (\alpha_1 u_n + \alpha_2 v_n) u_{n+1,x} + \alpha_2 u_n v_{n+1,x}, \\ \varepsilon v_{n+1,xx} = v_{n+1,t} + (\beta_1 v_n + \beta_2 u_n) v_{n+1,x} + \beta_2 v_n u_{n+1,x}, \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (17)$$

引入记号 $s(x, t) = \alpha_1 u_n + \alpha_2 v_n$ 、 $\tilde{s}(x, t) = \beta_1 v_n + \beta_2 u_n$ 、 $g(x, t) = \alpha_2 u_n$ 、 $\tilde{g}(x, t) = \beta_2 v_n$ 、 $u(x, t) = u_{n+1}(x, t)$ 、 $v(x, t) = v_{n+1}(x, t)$ ，则方程可简记为：

$$\begin{cases} \varepsilon u_{xx} = u_t + s(x, t) u_x + g(x, t) v_x, \\ \varepsilon v_{xx} = v_t + \tilde{s}(x, t) v_x + \tilde{g}(x, t) u_x, \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (18)$$

3 有限差分-配点法的离散格式

3.1 半离散格式

将区间 $[a, b]$ 剖分为 $m+1$ 个第二类 Chebyshev 节点，即 $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$ ，记 $u(x_i, t) = u_i(t)$ 、 $v(x_i, t) = v_i(t)$ ，固定变量 t ，得 $u(x, t)$ 、 $v(x, t)$ 在点 x_0, x_1, \dots, x_m 的重心插值函数为：

$$\begin{cases} u(x, t) = \sum_{l=0}^m L_l(x) u_l(t), \\ v(x, t) = \sum_{l=0}^m L_l(x) v_l(t). \end{cases} \quad (19)$$

将式(19)代入式(18)，并令其在节点 x_0, x_1, \dots, x_m 处成立，可得：

$$\begin{cases} \varepsilon \sum_{l=0}^m L_l''(x_i) u_l(t) = \sum_{l=0}^m L_l(x_i) \dot{u}_l(t) + s(x_i, t) \sum_{l=0}^m L_l'(x_i) u_l(t) + g(x_i, t) \sum_{l=0}^m L_l'(x_i) v_l(t), \\ \varepsilon \sum_{l=0}^m L_l''(x_i) v_l(t) = \sum_{l=0}^m L_l(x_i) \dot{v}_l(t) + \tilde{s}(x_i, t) \sum_{l=0}^m L_l'(x_i) v_l(t) + \tilde{g}(x_i, t) \sum_{l=0}^m L_l'(x_i) u_l(t), \end{cases} \quad (20)$$

式中： $\dot{u}_l(t) = \frac{du_l(t)}{dt}$ ， $\dot{v}_l(t) = \frac{dv_l(t)}{dt}$ ， $L_l''(x_i) = C_{il}^{(2)}$ ， $L_l'(x_i) = C_{il}^{(1)}$ ，其中 $C_{il}^{(v)}$ ($v = 1, 2, \dots$) 是节点 x_0, x_1, \dots, x_m 上重心插值的 v 阶微分矩阵的元素。

记 $s(x_i, t) = s_i(t)$ 、 $\tilde{s}(x_i, t) = \tilde{s}_i(t)$ 、 $g(x_i, t) = g_i(t)$ 、 $\tilde{g}(x_i, t) = \tilde{g}_i(t)$ ， $i = 0, 1, \dots, m$ ，且令 $\mathbf{U} = [u_0(t), u_1(t), \dots, u_m(t)]^T$ 、 $\mathbf{V} = [v_0(t), v_1(t), \dots, v_m(t)]^T$ 、 $\mathbf{S} = \text{diag}(s_0(t), s_1(t), \dots, s_m(t))$ 、 $\tilde{\mathbf{S}} = \text{diag}(\tilde{s}_0(t), \tilde{s}_1(t), \dots, \tilde{s}_m(t))$ 、 $\mathbf{G} = \text{diag}(g_0(t), g_1(t), \dots, g_m(t))$ 、 $\tilde{\mathbf{G}} = \text{diag}(\tilde{g}_0(t), \tilde{g}_1(t), \dots, \tilde{g}_m(t))$ 。

则式(20)可表示为：

$$\begin{cases} \varepsilon \mathbf{C}^{(2)} \mathbf{U} = \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{S} \mathbf{C}^{(1)} \mathbf{U} + \mathbf{G} \mathbf{C}^{(1)} \mathbf{V}, \\ \varepsilon \mathbf{C}^{(2)} \mathbf{V} = \dot{\mathbf{V}} + \tilde{\mathbf{S}} \mathbf{C}^{(1)} \mathbf{V} + \tilde{\mathbf{G}} \mathbf{C}^{(1)} \mathbf{U}, \end{cases} \quad (21)$$

式中： $\mathbf{C}^{(1)}$ 、 $\mathbf{C}^{(2)}$ 的矩阵形式为 $\begin{pmatrix} C_{00}^{(1)} & \dots & C_{0m}^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{m0}^{(1)} & \dots & C_{mm}^{(1)} \end{pmatrix}$ 、 $\begin{pmatrix} C_{00}^{(2)} & \dots & C_{0m}^{(2)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{m0}^{(2)} & \dots & C_{mm}^{(2)} \end{pmatrix}$ 。

3.2 半离散格式的相容性分析

针对耦合 Burgers 方程的重心插值配点格式展开相容性分析。依据插值余项定理，可得：

$$e(x) := u(x) - p(x) = \frac{u^{(m+1)}(\xi_i)}{(m+1)!} \prod_{i=0}^m (x - x_i), \quad (22)$$

式中： $p(x)$ 是 $u(x)$ 的重心 Lagrange 插值逼近函数。

引理 1 若 $u(x) \in C^{m+1}([a, b])$ ，则式(22)定义的误差函数 $e(x)$ 具备如下逼近性质^[13]：

$$\begin{cases} |e(x)| \leq C_1 \|u^{(m+1)}\|_{\infty} \left(\frac{el_x}{2m} \right)^m, \\ |e'(x)| \leq C_1^* \|u^{(m+1)}\|_{\infty} \left(\frac{el_x}{2(m-1)} \right)^{m-1}, \\ |e''(x)| \leq C_1^{**} \|u^{(m+1)}\|_{\infty} \left(\frac{el_x}{2(m-2)} \right)^{m-2}, \end{cases} \quad (23)$$

式中: e 是自然常数; l_x 代表区间长度 $[a, b]$ 的一半.

定理 1 若 $u(x), v(x) \in C^{m+1}[a, b] \times C^0[0, T]$, 假设 $u(x, t), u(x_m, t), v(x, t), v(x_m, t)$ 有界, 则有如下误差结果:

$$|u(x, t) - u(x_m, t)| + |v(x, t) - v(x_m, t)| \leq C \left\{ \|u^{(m+1)}\|_{\infty} \left(\frac{el_x}{2(m-2)} \right)^{m-2} + \|v^{(m+1)}\|_{\infty} \left(\frac{el_x}{2(m-2)} \right)^{m-2} \right\}, \quad (24)$$

式中: $u(x_m, t)$ 为 $u(x, t)$ 的重心 Lagrange 插值函数; $v(x_m, t)$ 为 $v(x, t)$ 的重心 Lagrange 插值函数.

证明 由式(15)有:

$$\begin{aligned} & \varepsilon(u_{xx}(x, t) + v_{xx}(x, t)) - (u_t(x, t) + v_t(x, t)) - \\ & (\alpha_1 u(x, t) + \alpha_2 v(x, t) + \beta_2 v(x, t))u_x(x, t) - \\ & (\beta_1 v(x, t) + \beta_2 u(x, t) + \alpha_2 u(x, t))v_x(x, t) = 0, \end{aligned} \quad (25)$$

则

$$\begin{aligned} & [\varepsilon(u_{xx}(x, t) + v_{xx}(x, t)) - (u_t(x, t) + v_t(x, t)) - (\alpha_1 u(x, t) + \alpha_2 v(x, t) + \beta_2 v(x, t))u_x(x, t) - \\ & (\beta_1 v(x, t) + \beta_2 u(x, t) + \alpha_2 u(x, t))v_x(x, t)] - [\varepsilon(u_{xx}(x_m, t) + v_{xx}(x_m, t)) - (u_t(x_m, t) + v_t(x_m, t)) - \\ & (\alpha_1 u(x_m, t) + \alpha_2 v(x_m, t) + \beta_2 v(x_m, t))u_x(x_m, t) - (\beta_1 v(x_m, t) + \beta_2 u(x_m, t) + \alpha_2 u(x_m, t))v_x(x_m, t)] \\ & = \varepsilon[u_{xx}(x, t) + v_{xx}(x, t) - (u_{xx}(x_m, t) + v_{xx}(x_m, t))] - [u_t(x, t) + v_t(x, t) - (u_t(x_m, t) + v_t(x_m, t))] - \\ & [(\alpha_1 u(x, t) + \alpha_2 v(x, t) + \beta_2 v(x, t))u_x(x, t) - (\alpha_1 u(x_m, t) + \alpha_2 v(x_m, t) + \beta_2 v(x_m, t))u_x(x_m, t)] - \\ & [(\beta_1 v(x, t) + \beta_2 u(x, t) + \alpha_2 u(x, t))v_x(x, t) - (\beta_1 v(x_m, t) + \beta_2 u(x_m, t) + \alpha_2 u(x_m, t))v_x(x_m, t)] \\ & := R_1 - R_2 - R_3 - R_4. \end{aligned} \quad (26)$$

对于 R_1 , 有:

$$\begin{aligned} |R_1| &= |\varepsilon[u_{xx}(x, t) + v_{xx}(x, t) - (u_{xx}(x_m, t) + v_{xx}(x_m, t))]| \\ &= |\varepsilon[(u_{xx}(x, t) - u_{xx}(x_m, t)) + (v_{xx}(x, t) - v_{xx}(x_m, t))]| \\ &\leq C_1^{**} \|u^{(m+1)}\|_{\infty} \left(\frac{el_x}{2(m-2)} \right)^{m-2} + C_1^{**} \|v^{(m+1)}\|_{\infty} \left(\frac{el_x}{2(m-2)} \right)^{m-2}. \end{aligned} \quad (27)$$

对于 R_2 , 有:

$$\begin{aligned} |R_2| &= |(u_t(x, t) + v_t(x, t)) - (u_t(x_m, t) + v_t(x_m, t))| \\ &= |(u_t(x, t) - u_t(x_m, t)) + (v_t(x, t) - v_t(x_m, t))| \\ &\leq C_1 \|u^{(m+1)}\|_{\infty} \left(\frac{el_x}{2m} \right)^m + C_1 \|v^{(m+1)}\|_{\infty} \left(\frac{el_x}{2m} \right)^m. \end{aligned} \quad (28)$$

对于 R_3 , 有:

$$\begin{aligned} |R_3| &= |(\alpha_1 u(x, t) + \alpha_2 v(x, t) + \beta_2 v(x, t))u_x(x, t) - (\alpha_1 u(x_m, t) + \alpha_2 v(x_m, t) + \beta_2 v(x_m, t))u_x(x_m, t)| \\ &\leq C |u_x(x, t) - u_x(x_m, t)| \leq C_1^* \|u^{(m+1)}\|_{\infty} \left(\frac{el_x}{2(m-1)} \right)^{m-1}. \end{aligned} \quad (29)$$

对于 R_4 , 有:

$$\begin{aligned} |R_4| &= |(\beta_1 v(x, t) + \beta_2 u(x, t) + \alpha_2 u(x, t))v_x(x, t) - (\beta_1 v(x_m, t) + \beta_2 u(x_m, t) + \alpha_2 u(x_m, t))v_x(x_m, t)| \\ &\leq C |v_x(x, t) - v_x(x_m, t)| \leq C_1^* \|v^{(m+1)}\|_{\infty} \left(\frac{el_x}{2(m-1)} \right)^{m-1}. \end{aligned} \quad (30)$$

将式(27~30)代入式(26), 可得耦合 Burgers 方程空间半离散格式的相容性分析.

3.3 全离散格式

为构建 Crank-Nicolson 格式对应的全离散格式, 本文对时间维度进行等距剖分, 取时间步长 $\tau = T/n$, 其中时间节点满足 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$.

采用 Crank-Nicolson 格式对式(21)进行离散, 可得:

$$\begin{cases} \varepsilon C^{(2)} U^{k+\frac{1}{2}} = \frac{U^{k+1} - U^k}{\tau} + S^{k+\frac{1}{2}} C^{(1)} U^{k+\frac{1}{2}} + G^{k+\frac{1}{2}} C^{(1)} V^{k+\frac{1}{2}}, \\ \varepsilon C^{(2)} V^{k+\frac{1}{2}} = \frac{V^{k+1} - V^k}{\tau} + \tilde{S}^{k+\frac{1}{2}} C^{(1)} V^{k+\frac{1}{2}} + \tilde{G}^{k+\frac{1}{2}} C^{(1)} U^{k+\frac{1}{2}}. \end{cases} \quad (31)$$

将 $U^{k+1/2} = (U^{k+1} + U^k)/2$ 、 $V^{k+1/2} = (V^{k+1} + V^k)/2$ 代入, 得到全离散格式如下:

$$\begin{cases} \left(\frac{\tau \varepsilon}{2} C^{(2)} - \frac{\tau}{2} S^{k+\frac{1}{2}} C^{(1)} - I_{m+1} \right) U^{k+1} - \frac{\tau}{2} G^{k+\frac{1}{2}} C^{(1)} V^{k+1} = \\ \left(\frac{\tau}{2} S^{k+\frac{1}{2}} C^{(1)} - \frac{\tau \varepsilon}{2} C^{(2)} - I_{m+1} \right) U^k + \frac{\tau}{2} G^{k+\frac{1}{2}} C^{(1)} V^k, \\ \left(\frac{\tau \varepsilon}{2} C^{(2)} - \frac{\tau}{2} \tilde{S}^{k+\frac{1}{2}} C^{(1)} - I_{m+1} \right) V^{k+1} - \frac{\tau}{2} \tilde{G}^{k+\frac{1}{2}} C^{(1)} U^{k+1} = \\ \left(\frac{\tau}{2} \tilde{S}^{k+\frac{1}{2}} C^{(1)} - \frac{\tau \varepsilon}{2} C^{(2)} - I_{m+1} \right) V^k + \frac{\tau}{2} \tilde{G}^{k+\frac{1}{2}} C^{(1)} U^k, \end{cases} \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (32)$$

3.4 全离散格式的相容性分析

定理 2 设 $u(x), v(x) \in C^{m+1}[a, b] \times C^2(0, T]$. 通过 Crank-Nicolson 格式与重心 Lagrange 插值配点法所得非线性离散格式分别记为 $u^h(x_m, t_n), v^h(x_m, t_n)$. 则有:

$$|u(x, t) - u^h(x_m, t_n)| + |v(x, t) - v^h(x_m, t_n)| \leq C \left\{ \tau^2 + \|u^{(m+1)}\|_{\infty} \left[\left(\frac{e l_x}{2(m-2)} \right)^{m-2} \right] + \|v^{(m+1)}\|_{\infty} \left[\left(\frac{e l_x}{2(m-2)} \right)^{m-2} \right] \right\}. \quad (33)$$

证明 设式(1)在时间维度采用 Crank-Nicolson 差分方法进行离散得到的数值解为 $u(x, t_{n+1/2})$, 则有:

$$\begin{aligned} & \varepsilon (u_{xx}(x, t_{n+1/2}) + v_{xx}(x, t_{n+1/2})) - \delta (u_t(x, t_{n+1/2}) + v_t(x, t_{n+1/2})) - \\ & (\alpha_1 u(x, t_{n+1/2}) + \alpha_2 v(x, t_{n+1/2}) + \beta_2 v(x, t_{n+1/2})) u_x(x, t_{n+1/2}) - \\ & (\beta_1 v(x, t_{n+1/2}) + \beta_2 u(x, t_{n+1/2}) + \alpha_2 u(x, t_{n+1/2})) v_x(x, t_{n+1/2}) = R^n, \end{aligned} \quad (34)$$

式中: $\delta u_t(x, t_{n+1/2}) = (u(x, t_{n+1}) - u(x, t_n))/\tau$, $\delta v_t(x, t_{n+1/2}) = (v(x, t_{n+1}) - v(x, t_n))/\tau$, $R^n = \delta u_t(x, t_{n+1/2}) - u_t(x, t_{n+1/2}) + \delta v_t(x, t_{n+1/2}) - v_t(x, t_{n+1/2})$ 为时间方向的截断误差.

由 Taylor 展开, 可得:

$$|R^n| \leq C \tau^2. \quad (35)$$

空间方向利用重心 Lagrange 插值配点法离散, 有:

$$\begin{aligned} & \varepsilon (u_{xx}(x_m, t_{n+1/2}) + v_{xx}(x_m, t_{n+1/2})) - \delta (u_t^h(x_m, t_{n+1/2}) + v_t^h(x_m, t_{n+1/2})) - \\ & (\alpha_1 u^h(x_m, t_{n+1/2}) + \alpha_2 v^h(x_m, t_{n+1/2}) + \beta_2 v^h(x_m, t_{n+1/2})) u_x^h(x_m, t_{n+1/2}) - \\ & (\beta_1 v^h(x_m, t_{n+1/2}) + \beta_2 u^h(x_m, t_{n+1/2}) + \alpha_2 u^h(x_m, t_{n+1/2})) v_x^h(x_m, t_{n+1/2}) = R^n + \varepsilon^m, \end{aligned} \quad (36)$$

式中: ε^m 为空间截断误差.

由式(34)和式(36)可得:

$$\begin{aligned} & \varepsilon [(u_{xx}(x, t_{n+1/2}) - u_{xx}(x_m, t_{n+1/2})) + (v_{xx}(x, t_{n+1/2}) - v_{xx}(x_m, t_{n+1/2}))] - \\ & \delta [(u_t(x, t_{n+1/2}) - u_t^h(x_m, t_{n+1/2})) + (v_t(x, t_{n+1/2}) - v_t^h(x_m, t_{n+1/2}))] - \\ & [(\alpha_1 u(x, t_{n+1/2}) + \alpha_2 v(x, t_{n+1/2}) + \beta_2 v(x, t_{n+1/2})) u_x(x, t_{n+1/2}) - \\ & (\alpha_1 u^h(x_m, t_{n+1/2}) + \alpha_2 v^h(x_m, t_{n+1/2}) + \beta_2 v^h(x_m, t_{n+1/2})) u_x^h(x_m, t_{n+1/2})] - \\ & [(\beta_1 v(x, t_{n+1/2}) + \beta_2 u(x, t_{n+1/2}) + \alpha_2 u(x, t_{n+1/2})) v_x(x, t_{n+1/2}) - \\ & (\beta_1 v^h(x_m, t_{n+1/2}) + \beta_2 u^h(x_m, t_{n+1/2}) + \alpha_2 u^h(x_m, t_{n+1/2})) v_x^h(x_m, t_{n+1/2})] = -\varepsilon^m. \end{aligned} \quad (37)$$

由引理 1, 类似定理 1 的推导, 有:

$$|\varepsilon^m| \leq C \left\{ \|u^{(m+1)}\|_{\infty} \left[\left(\frac{e l_x}{2(m-2)} \right)^{m-2} \right] + \|v^{(m+1)}\|_{\infty} \left[\left(\frac{e l_x}{2(m-2)} \right)^{m-2} \right] \right\}. \quad (38)$$

结合式(35)和式(38), 定理得证.

4 数值实验

为验证前文构建的 BICM-CN 格式的有效性,本节通过数值算例展开分析. 其中绝对误差 $\|E\|_\infty$ 定义如下:

$$\|E(u)\|_\infty := \|u_c - u_e\|_\infty, \|E(v)\|_\infty := \|v_c - v_e\|_\infty, \quad (39)$$

式中: u_c 和 v_c 为式(1)的数值解; u_e 和 v_e 为式(1)的精确解; $\|\cdot\|_\infty$ 为矩阵的无穷范数.

4.1 算例 1

取 $\varepsilon = 1, \alpha_1 = -2, \alpha_2 = 1, \beta_1 = -2, \beta_2 = 1$, 即考虑如下方程:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 2uu_x - (uv)_x, \\ v_t = v_{xx} + 2vv_x - (uv)_x, \end{cases} \quad -\pi \leq x \leq \pi, 0 \leq t \leq T. \quad (40)$$

初始条件为:

$$u(x, 0) = v(x, 0) = \sin(x), \quad -\pi \leq x \leq \pi. \quad (41)$$

边值条件为:

$$\begin{aligned} u(-\pi, t) = u(\pi, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \\ v(-\pi, t) = v(\pi, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \quad (42)$$

初始假设函数取 $u_0 = \sin(x), v_0 = \cos(x)$, 耦合 Burgers 方程的解析解为:

$$u(x, t) = v(x, t) = e^{-t} \sin x. \quad (43)$$

表 1 展示了耦合 Burgers 方程采用 BICM-CN 格式的时间收敛阶结果. 当 $m = 20, T = 1$ 时, 随着时间步长逐步减小, 耦合方程绝对误差的数量级从 10^{-5} 下降到 10^{-7} , 通过计算时间收敛阶为二阶精度.

表 1 耦合 Burgers 方程 BICM-CN 格式时间收敛阶数 ($m = 20, T = 1$)

Table 1 Temporal convergence orders of the BICM-CN scheme for the coupled Burgers' equations ($m = 20, T = 1$)

Δt	绝对误差	收敛阶
1/20	7.5863×10^{-5}	-
1/40	1.8962×10^{-5}	2.000 293
1/80	4.7402×10^{-6}	2.000 073
1/160	1.1850×10^{-6}	2.000 018
1/320	2.9626×10^{-7}	2.000 004

由表 2 可知, 与有限差分法格式比较, 本文 BICM-CN 格式使用 10 个节点得到的误差比有限差分使用 32 个节点得到的误差小得多, 数值解的精度更高. 在相同 8 个节点的情况下, 与有限差分法格式比较, BICM-CN 格式的误差缩小了 20 多倍.

表 2 耦合 Burgers 方程 BICM-CN 格式不同空间节点数误差对比 ($\Delta t = 0.001, T = 1$)

Table 2 Error comparison of the BICM-CN scheme for the coupled Burgers' equations with varying number of spatial nodes ($\Delta t = 0.001, T = 1$)

m	有限差分法		m	BICM-CN	
	$\ E(u)\ _\infty$	$\ E(v)\ _\infty$		$\ E(u)\ _\infty$	$\ E(v)\ _\infty$
8	4.8832×10^{-2}	4.8832×10^{-2}	4	5.7123×10^{-2}	5.7123×10^{-2}
16	1.3198×10^{-2}	1.3198×10^{-2}	6	3.2816×10^{-3}	3.2816×10^{-3}
32	3.3756×10^{-3}	3.3756×10^{-3}	8	1.0415×10^{-4}	1.0415×10^{-4}
64	8.4397×10^{-4}	8.4397×10^{-4}	10	2.6908×10^{-6}	2.6908×10^{-6}

由图 1 中两种空间离散格式的收敛精度可知, BICM-CN 格式的误差从 10^{-2} 下降到 10^{-6} , 具有指数收敛的性质.

图 2、图 3 展示了采用 BICM-CN 格式求解耦合 Burgers 方程组时, 在空间节点数 $m = 20$ 、时间步长 $\Delta t = 0.02$ 、最终时刻 $T = 1$ 条件下的计算结果. 其中: 图 2 为 u, v 的数值解与精确解的图像, 图 3 为相同参数下 u, v 的绝对误差图像. 可知 BICM-CN 格式求解耦合 Burgers 方程能达到较高精度.

图 4 展示了在保持 $m = 20, \Delta t = 0.02$ 不变的前提下, 改变最终时刻 T 的取值, 得到的 u, v 数值解图像. 可知随着 T 的改变, 数值解始终保持稳定.

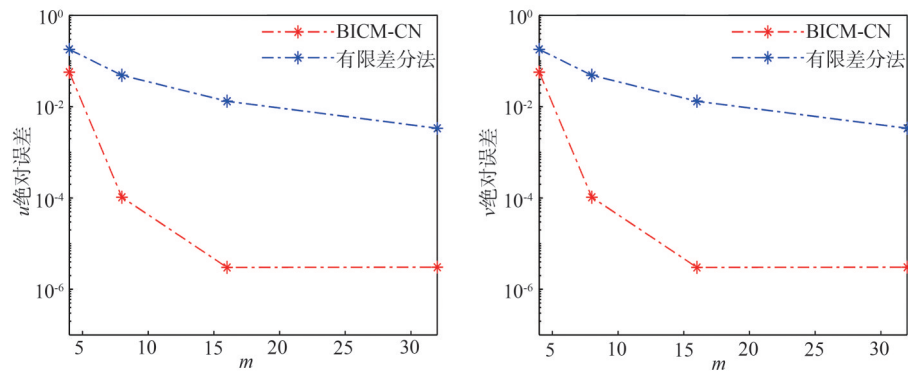


图 1 耦合 Burgers 方程的不同空间离散格式的收敛精度图像

Figure 1 Convergence accuracy of different spatial discretization schemes for the coupled Burgers' equations

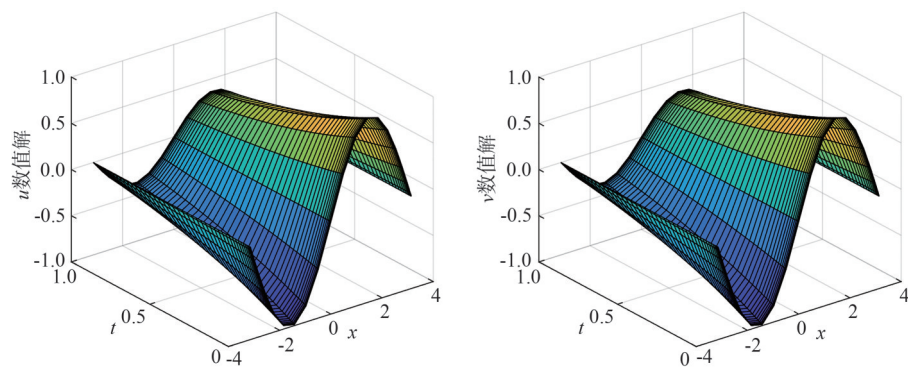


图 2 耦合 Burgers 方程的数值解图像

Figure 2 Numerical solutions of the coupled Burgers' equations

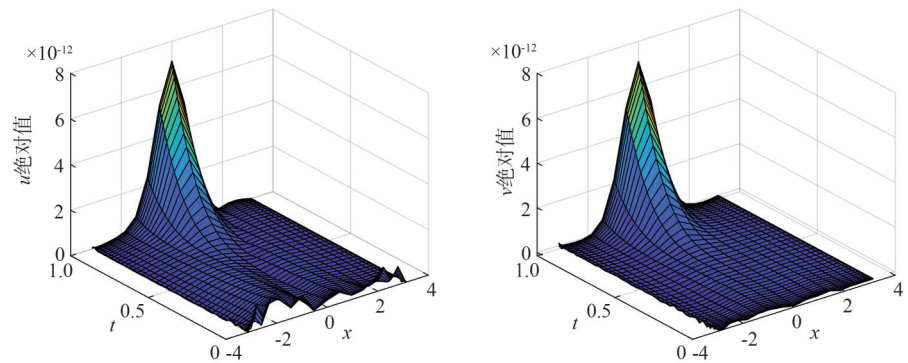


图 3 耦合 Burgers 方程的绝对误差图像

Figure 3 Absolute error plots for the coupled Burgers' equations

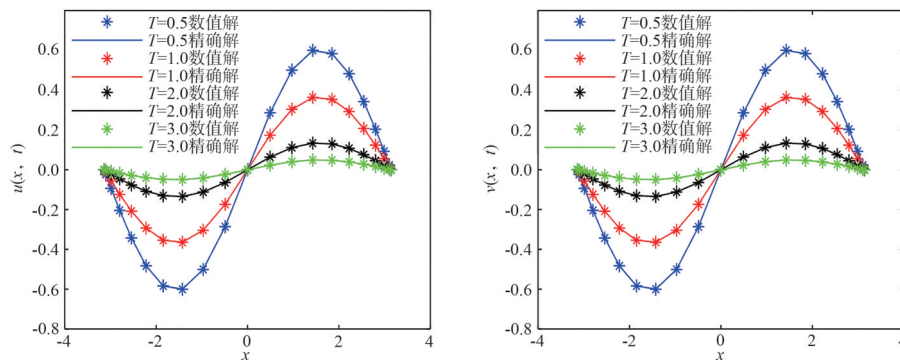


图 4 当 $m = 20, \Delta t = 0.02$ 时耦合 Burgers 方程的不同 T 图像

Figure 4 Numerical and exact solutions of the coupled Burgers' equations at various time levels ($m = 20, \Delta t = 0.02$)

4.2 算例 2

取 $\varepsilon = 1, \alpha_1 = 2, \beta_1 = 2$, 即考虑如下方程:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 2uu_x + \alpha_2(uv)_x, \\ v_t = v_{xx} + 2vv_x + \beta_2(uv)_x, \end{cases} \quad -10 \leq x \leq 10, 0 \leq t \leq T. \quad (44)$$

耦合 Burgers 方程的精确解为:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= a_0 - 2A \left(\frac{2\alpha_2 - 1}{4\alpha_2\beta_2 - 1} \right) \tanh(A(x - 2At)), \\ v(x, t) &= a_0 \left(\frac{2\beta_2 - 1}{2\alpha_2 - 1} \right) - 2A \left(\frac{2\alpha_2 - 1}{4\alpha_2\beta_2 - 1} \right) \tanh(A(x - 2At)), \\ A &= \frac{4\alpha_2\beta_2 - 1}{4\alpha_2 - 2}, \end{aligned} \quad (45)$$

其中初边值条件取决于精确解. 分别在以下 3 种情况, 计算 $u(x, t), v(x, t)$ 在 $T = 1$ 时刻的数值解. 情形 1: $\alpha_2 = 1, \beta_2 = 2, a_0 = 0.05$; 情形 2: $\alpha_2 = 0.1, \beta_2 = 0.3, a_0 = 0.05$; 情形 3: $\alpha_2 = 0.3, \beta_2 = 0.03, a_0 = 0.05$.

图 5、图 6、图 7 展示了采用 BICM-CN 格式求解耦合 Burgers 方程组, 当 $m = 20, \Delta t = 0.01, T = 1$ 时, u 与 v 的数值解、精确解. 结合表 3, 观察数值解与精确解之间的误差, 发现不同系数下, BICM-CN 求解耦合 Burgers 方程的数值解对精确解的逼近效果好.

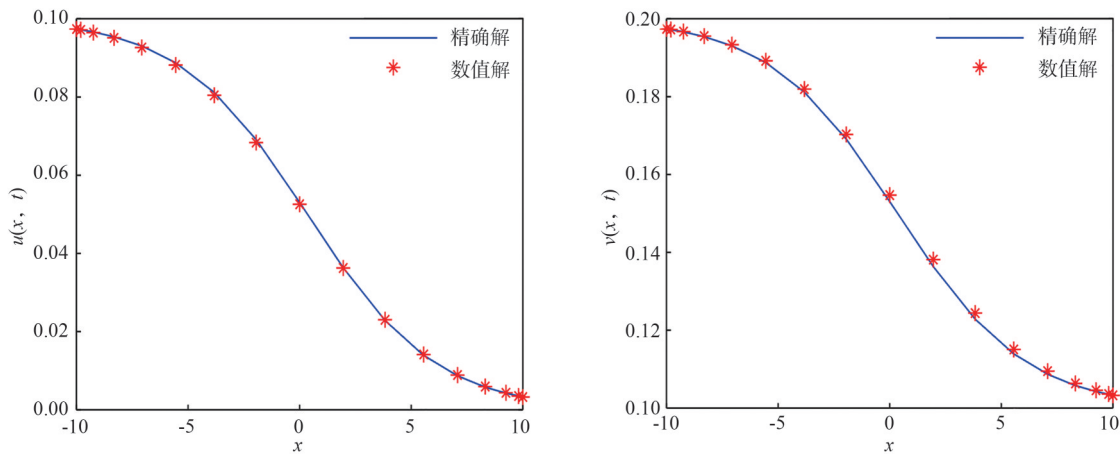


图 5 情形 1 的数值解与精确解 ($\alpha_2 = 1, \beta_2 = 2, a_0 = 0.05, T = 1$)

Figure 5 Profiles of numerical and exact solutions for Case 1 ($\alpha_2 = 1, \beta_2 = 2, a_0 = 0.05, T = 1$)

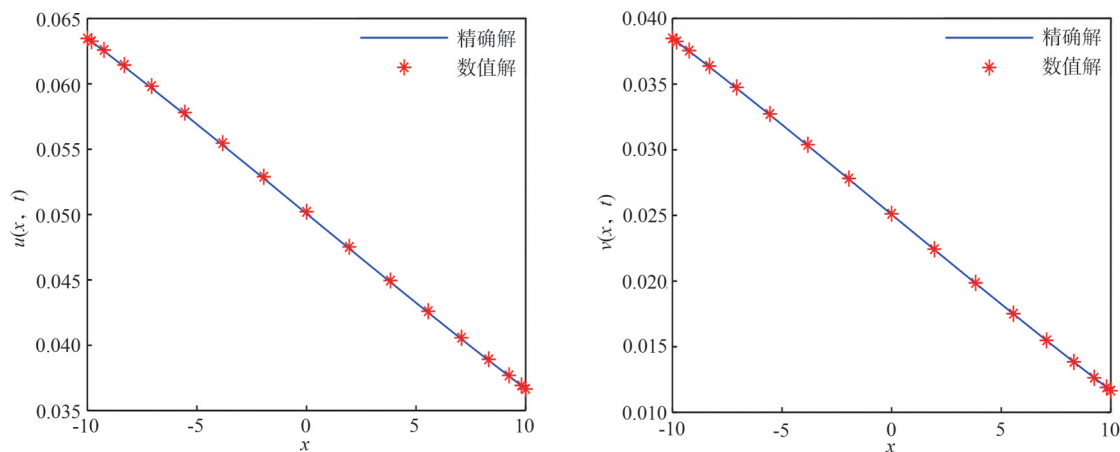


图 6 情形 2 的数值解与精确解 ($\alpha_2 = 0.1, \beta_2 = 0.3, a_0 = 0.05, T = 1$)

Figure 6 Profiles of numerical and exact solutions for Case 2 ($\alpha_2 = 0.1, \beta_2 = 0.3, a_0 = 0.05, T = 1$)

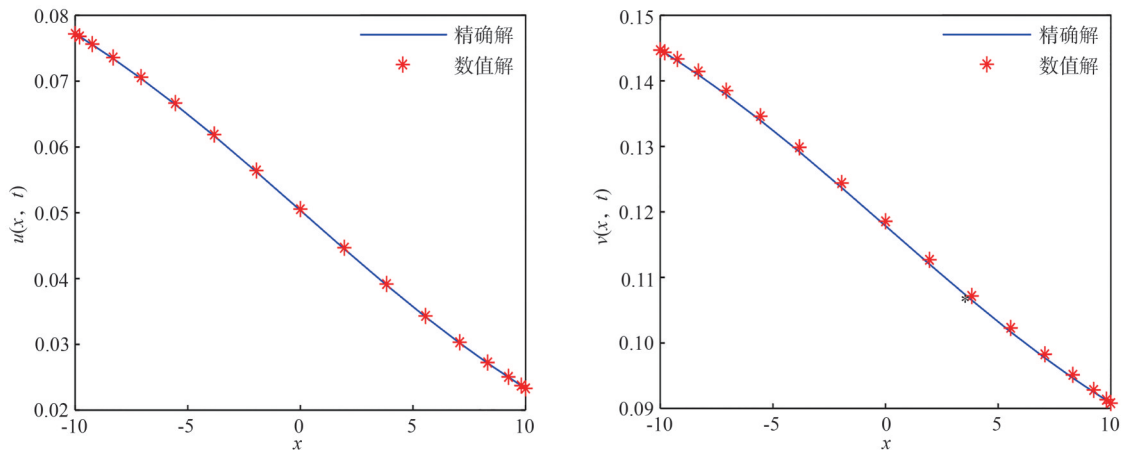


图 7 情形3的数值解与精确解($\alpha_2 = 0.3, \beta_2 = 0.03, a_0 = 0.05, T = 1$)

Figure 7 Profiles of numerical and exact solutions for Case 3 ($\alpha_2 = 0.3, \beta_2 = 0.03, a_0 = 0.05, T = 1$)

表 3 耦合 Burgers 方程在不同系数下的误差范数

Table 3 Error norms of the coupled Burgers' equations for various coefficients

m	α_2	β_2	$T = 0.5$		$T = 1$	
			$\ E(u)\ _\infty$	$\ E(v)\ _\infty$	$\ E(u)\ _\infty$	$\ E(v)\ _\infty$
16	0.1	0.3	7.7317×10^{-5}	3.7659×10^{-5}	1.5306×10^{-5}	7.3638×10^{-5}
	0.3	0.03	7.0693×10^{-5}	3.5230×10^{-5}	1.0693×10^{-5}	7.0543×10^{-5}
20	0.1	0.3	7.7320×10^{-5}	3.7979×10^{-5}	1.5292×10^{-5}	7.3517×10^{-5}
	0.3	0.03	7.0109×10^{-5}	3.5305×10^{-5}	1.1385×10^{-5}	7.0626×10^{-5}

图8展示了采用BICM-CN格式求解耦合 Burgers 方程组,当 $m = 16, \Delta t = 0.05$ 时,不同 T 的数值解图像. 可知随着 T 的改变,数值解保持稳定.

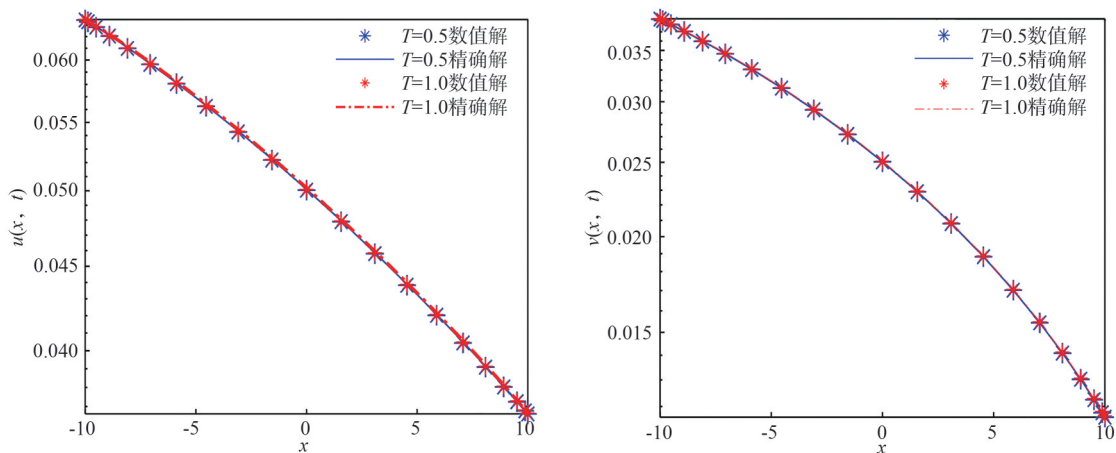


图 8 当 $m = 16, \Delta t = 0.05$ 时耦合 Burgers 方程的不同 T 图像

Figure 8 Numerical and exact solutions for the coupled Burgers' equations at various time levels ($m = 16, \Delta t = 0.05$)

5 结束语

本文利用重心插值配点法结合 Crank-Nicolson 格式求解非线性耦合 Burgers 方程. 针对方程的非线性部分,运用直接线性化迭代的方式进行处理,由此推导得到线性代数方程,同时给出全离散格式的相容性误差分析. 相比传统有限差分法,本文格式仅需较少的计算节点就可得到较高的精度,并通过数值算例验证了本文格式的高精度与有效性. 未来研究中,可尝试将本文使用的重心插值配点法与更多高效的数值方法结合,以探索在更高维的 Burgers 方程或其他复杂非线性方程求解中的应用潜力.

参考文献:

- [1] Sheng Z H, Liu Y, Li Y H. Finite element method combined with time graded meshes for the time-fractional coupled Burgers' equations[J]. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 2024, 70: 513-533.
- [2] Alharbi R, Alshareef A, Bakodah H O, et al. Computational treatment for the coupled system of viscous Burger's equations through non-central formula in the method of lines[J]. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 2024, 17(2): 753-771.
- [3] Ghafoor U, Abbas M, Akram T, et al. An efficient cubic B-spline technique for solving the time fractional coupled viscous Burgers equation[J]. *Fractal and Fractional*, 2024, 8: 93.
- [4] Ahmad H, Khan T A, Cesarano C. Numerical solutions of coupled Burgers' equations[J]. *Axioms*, 2019, 8: 119.
- [5] 童艳蕾, 姚晓珍, 林梦淳, 等. 求解 Allen-Cahn 方程的半隐配点格式[J]. *数学理论与应用*, 2023, 43(4): 106-122.
Tong Y L, Yao X Z, Lin M T, et al. A semi-implicit collocation scheme for the Allen-Cahn equation[J]. *Mathematical Theory and Applications*, 2023, 43(4): 106-122. (in Chinese)
- [6] Li J, Qu J Z. Barycentric Lagrange interpolation collocation method for solving the Sine-Gordon equation[J]. *Wave Motion*, 2023, 120: 103159.
- [7] Azin H, Mohammadi F. Approximate solution of Volterra-Fredholm integral equations using generalized barycentric rational interpolant[J]. *Applied Mathematics—A Journal of Chinese Universities*, 2024, 39(2): 220-238.
- [8] 邓杨芳, 黄蓉, 翁智峰. 重心插值配点法求解 Cahn-Hilliard 方程[J]. *华侨大学学报(自然科学版)*, 2022, 43(1): 135-144.
Deng Y F, Huang R, Weng Z F. Barycentric interpolation collocation method for Cahn-Hilliard equation[J]. *Journal of Huaqiao University(Natural Science)*, 2022, 43(1): 135-144. (in Chinese)
- [9] Higham N J. The numerical stability of barycentric Lagrange interpolation[J]. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 2004, 24: 547-556.
- [10] Li J. Barycentric rational collocation method for fractional reaction-diffusion equation[J]. *AIMS Mathematics*, 2023, 8(4): 9009-9026.
- [11] Li J, Cheng Y L. Barycentric rational method for solving biharmonic equation by depression of order[J]. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 2021, 37: 1993-2007.
- [12] Liu F F, Wang Y L, Li S G. Barycentric interpolation collocation method for solving the coupled viscous Burgers' equations[J]. *International Journal of Computer Mathematics*, 2018, 95(11): 2162-2173.
- [13] Yi S C, Yao L Q. A steady barycentric Lagrange interpolation method for the 2D higher-order time-fractional telegraph equation with nonlocal boundary condition with error analysis[J]. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 2019, 35: 1694-1716.
- [14] Li J, Cheng Y L. Linear barycentric rational collocation method for solving heat conduction equation[J]. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 2021, 37: 533-545.
- [15] Berrut J P, Trefethen L N. Barycentric Lagrange interpolation[J]. *SIAM Review*, 2004, 46(3): 501-517.

责任编辑: 张自强